1. Usando el teorema de de Moivre
2. Usando la derivada de la exponencial
3. Usando la definición de la exponencial

Imagina que tienes a mano la definición de la exponencial: e^x es igual al límite, cuando n tiende a infinito, de (1 + x/n)^n. Originalmente, esto está definido para valores de x reales. Pero conoces los números complejos, y te preguntas qué pasaría si pones un valor complejo para x. Antes que nada, ¿qué pasaría si pongo un número imaginario aquí? ¿qué pasa si pongo ix en vez de x? Bueno, la expresión termina siendo un número complejo, elevado a un número n muy grande. Y se te ocurre llamar a esto e^ix, decides definir la exponencial imaginaria, sea lo que sea que represente, como esta expresión de acá.

¿Y ahora qué? Bueno, tienes una potencia de un número complejo. Sabes que hay una forma conveniente en la que puedes trabajar esto: si expreso un número complejo en función de su módulo y de su ángulo, sé que al multiplicar números complejos, sus módulos se multiplican y sus ángulos se suman. Y si lo extiendo a las potencias, eso me lleva a que al multiplicar un número por sí mismo n veces, su módulo también se eleva a n, y su ángulo se multiplica por n.

Entonces, se te ocurre expresar la base de esta potencia, el 1 + ix/n, en su forma polar, |z|cis(theta). Y luego te queda el límite, cuando n tiende a infinito, de este número en forma polar elevado a n. Esto se distribuye y dentro del límite queda (|z|^n)\*(cis(theta))^n, pero por el teorema de de Moivre, cis(theta)^n es igual a cis(n\*theta). Todo esto concuerda con las reglas al elevar números complejos.

Ahora, tienes el límite de este producto. Y si por un momento supones que existe el límite de cada uno de los factores, esto podrías reescribirlo por el límite del módulo a la n, por el límite de cis(n\*theta). Y como cis es una función continua, esto último lo podrías reescribir como cis del límite de n\*theta.

(…)

4.

Ahora, imagina que en vez de trabajar con la definición de e^x, estás analizando la función cis igual a coseno + iseno. Te das cuenta de que tiene como propiedades que cis(x)cis(y) = cis(x+y), que cis(0) = 1, y otras cosas más, y luego te das cuenta que estas propiedades son exactamente las mismas que las que tiene la función exponencial. Increíble.

Esto fue justo lo que hicimos en el video que explicaba la fórmula de Euler. Pero hay una propiedad muy importante de las exponenciales que no analizamos en ese entonces. De repente, recuerdas que la función exponencial tiene una derivada muy especial: la derivada de la función e^x respecto de x es igual a sí misma, e^x. Y por regla de la cadena, la derivada de e^(alpha\*x) es igual a alpha\*e^(alpha\*x). Después piensas, “si acaso la función cis fuese una exponencial, debería tener esta misma propiedad, ¿o no?” Así que decides derivar la función cis, que no es nada más que coseno + iseno. Sabes que la derivada de coseno es -seno, y que la derivada de seno es coseno, así que la derivada final te queda -seno + icoseno. Esto al principio no parece la función cis por algo, ¿acaso nunca fue una exponencial? Pero luego lo reordenas como icos – sen, y te das cuenta de algo. Recuerdas que i² = -1, así que reemplazas ese -seno por i²\*sen, y te queda icos + i²sen. Factorizas por i, y te queda i factor de (cos + isen), o sea, i \* cis.

Acabas de encontrar que la derivada de cis es igual a i \* cis. Entonces, ¿esto significa que la función cis es igual a e^ix? Porque la derivada de esta última función, también es la misma función pero por i. Veamos si es verdad.

Si divides ambos lados por cis, te queda que la derivada de cis, partida en cis, es igual a i. Y hay una función cuya derivada es igual a la derivada de algo, partida en ese mismo algo. Y es el logaritmo natural. Si tienes el logaritmo natural de x, cuando lo derivas respecto de x te queda 1/x. Y si tienes el logaritmo natural de u, donde u es una función de x, al derivar respecto de x te queda 1/u \* u’. O sea, u’ / u.

Si tienes la derivada de cis, partida en cis, esto perfectamente puede reescribirse como la derivada de logaritmo natural de cis(x). Y el otro lado de la ecuación, que es simplemente la constante i, se puede pensar como la derivada de la función ix, porque la derivada de ix es simplemente i. Y algo que no hay que olvidar es agregar una constante cualquiera C al final, porque la derivada de cualquier constante es 0. Entonces al final te queda que logaritmo natural de cis(x), es igual a ix más una constante cualquiera C.

¿Cuál sería esta constante? Se te ocurre que, si evalúas x en 0, por una parte cis(0) es igual a 1, y por ende ln(cis(0)), o sea ln(1), es igual a 0. Y al otro lado, i\*0 es 0, y te queda 0 = C. Entonces la constante C sería 0, y te quedaría simplemente ln(cis(x)) = ix. Finalmente, si expresas e elevado a esa expresión, te quedaría cis(x) = e^ix. ¡Felicidades, acabas de redescubrir la fórmula de Euler!

...pero, hay un pequeño problema. Retrocedamos un poco. Si sustituyes x = 0, te queda 0 = C, y concluyes que la constante C es igual a 0. Pero, ¿qué pasa si en vez de x = 0, dijera x = 2pi? Resulta que cis(2pi) **también** es igual a 1, así que logaritmo de eso también es 0, **pero** al otro lado nos queda i\*2pi + C. O sea, 0 = 2pi\*i + C, lo que nos lleva a que C es igual a -2pi\*i, un valor completamente distinto a 0. Y no solo pasa con 2pi, sino que con cualquier múltiplo de 2pi. En general, si pones x = 2kpi, donde k es cualquier número entero, al despejar la constante te queda que C es igual a -2kpi\*i. ¿qué está pasando aquí? Resulta que el logaritmo complejo es una de esas “funciones” entre comillas que pueden tener múltiples valores. Como puede tomar varios valores con la misma entrada, técnicamente no son funciones. Este tipo de relaciones de números complejos, en realidad se conoce como “multifunciones”. Así que en realidad, la verdadera relación sería ln(cis(x)) = ix + 2kpi\*i, donde k es cualquier número entero. El logaritmo complejo es una “multifunción” que toma infinitos valores.

Entonces, si dices “e elevado a esta expresión”, te queda cis(x) = e^(ix + 2kpi\*i). Esto no es la fórmula de Euler. ¿Cómo salimos de este problema?

Resulta que cis(x) **no es** una multifunción. Es una función de las de siempre, que toma un valor de x y le asocia una **única** salida. Sabiendo eso, no permites que este problema te detenga y simplemente pones x = 0. Con eso obtienes por un lado cis(0), que es 1, y al otro lado te queda e^(2kpi\*i). Con eso descubres la relación e^(2kpi\*i) es igual a 1, sin importar qué valor entero de k le pongas. Genial.

Entonces, regresas a la expresión cis(x) = e^(ix + 2kpi\*i), pero esa exponencial la separas como e^ix \* e^(2kpi\*i). Pero acabas de descubrir que esto último es igual a 1, así que te queda finalmente cis(x) = e^ix, la fórmula de Euler.

3.

Acabas de encontrar dos demostraciones interesantes para la fórmula de Euler, pero no te convence lo suficiente y quieres encontrar más. Así que decides aplicar algo muy común a la hora de demostrar que dos funciones son iguales, y es algo así.

Tú quieres demostrar que cis(x) es igual a e^ix, ¿verdad? Pues supongamos que ya lo son. Entonces, lo que haces es dividir a ambos lados por una de las funciones, digamos e^ix. Entonces te queda cis(x) / e^ix es igual a 1. Lo siguiente es derivar ambos lados, quedando así que la derivada de cis(x) / e^ix es igual a 0.

¿Por qué hacemos esto? La lógica es la siguiente: si logras demostrar que la derivada de este cociente es 0, demuestras que este cociente es igual a cierta constante, porque la derivada de todo esto es lo que teníamos antes. Y si ahora demuestras que esta constante es igual a 1, demuestras que ambas funciones son iguales. Esto nos sirve porque sabemos la derivada de cis(x), que es i\*cis(x), y la derivada de e^ix, que es i\*e^ix, y también sabemos la derivada de un cociente.

Entonces, aplicas todo esto y obtienes que la derivada del cociente es igual a (i\*cis(x))\*e^ix – cis(x)\*(i\*e^ix), todo dividido en (e^ix)². Pero el numerador se cancela, se hace 0. Por lo que toda la derivada es igual a 0. Con eso acabas de demostrar que cis(x) / e^ix es igual a una constante. Pero, ¿cómo encontrar el valor de esa constante?

Si conoces el valor de la función en un punto, como la función tiene el mismo valor en todos los puntos, básicamente encuentras el valor constante al que esa función se iguala en todos los puntos. Y en este caso, sabes qué valores toman ambas funciones cuando x = 0. cis(0) es igual a 1, y e⁰ también es igual a 1. Por ende, tu cociente es igual a 1. Eso significa que la constante C es igual a 1, es decir, este cociente es igual a 1 en todos los puntos de x. Con eso puedes concluir que cis(x) es igual a e^ix.

4.

5.

Esta es bastante interesante porque es muy inesperada.

Para esta demostración, vamos a enfocarnos en las funciones trigonométricas. Para ser más preciso, en la función arcotangente. Recuerda que, en una circunferencia unitaria, si dibujas un ángulo theta al centro de esta circunferencia, que abarca cierto arco de esta, y en uno de los extremos de este arco dibujas una recta tangente a la circunferencia en ese punto, entonces el trozo de esta recta tangente que abarca este ángulo theta se conoce como “tangente de theta”. La función arcotangente es la inversa de la función tangente, y hace la pregunta contraria: dado un segmento x, que representa un trozo de recta tangente abarcado por cierto ángulo que no conocemos, la pregunta es, ¿cuál es este ángulo? O, si estás usando radianes, es lo mismo que preguntar, ¿cuál es la medida del **arco** que le corresponde a esta tangente? Por eso “arcotangente”.

Ahora, nos vamos a enfocar en esta función, porque tiene una derivada bastante especial. Su derivada es 1 / (1 + x²). Este tipo de funciones, que son cocientes de polinomios, se conocen como “funciones racionales”. Y si el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del del numerador, esta es una “fracción propia”. Si el denominador se puede factorizar en distintos términos, usualmente se separa en varias fracciones cuyos denominadores son esos términos. Estas fracciones se conocen como “fracciones parciales”. Por ejemplo, en la fracción 1 / (x² – 1), el denominador se puede factorizar en (x+1) y (x-1), y por ende la fracción se puede separar en dos fracciones, A / (x+1) y B / (x-1), donde A y B son constantes. Si multiplicamos ambos lados por (x+1) y por (x-1), y resolvemos las ecuaciones, obtenemos que A = ½ y B = -1/2. Así que estas son las fracciones en las que se puede separar 1 / (x² – 1).

Y nuestra fracción original, la derivada de la arcotangente, que es 1 / (1 + x²), es de ese tipo de funciones. También podríamos separarla en fracciones parciales… ¡pero un momento! Me dirás, “el denominador 1 + x² no se puede factorizar porque nunca se hace 0, esta es una suma de cuadrados y no se puede factorizar, ¡entonces no se puede hacer nada! ¿Verdad?” Y yo te diría, “1 + x² no se puede factorizar **en los reales**”. Pero sí tiene dos soluciones imaginarias. Resulta que esta suma de cuadrados se puede reescribir como una diferencia de cuadrados si insertas un i² a la mitad. 1 + x² se puede reescribir como 1 – i²x², o 1 – (ix)². Esta diferencia de cuadrados se puede factorizar como (1 + ix)(1 – ix). Así, nuestra fracción 1 / (1 + x²) se puede reescribir como A / (1 + ix) + B / (1 – ix), donde A y B son unas constantes por encontrar. Si multiplicamos ambos lados por (1+ix) y por (1-ix), y resolvemos las ecuaciones, obtenemos que A = ½ y B = ½. Por ende, 1 / (1 + x²) = ½(1 / (1+ix) + 1 / (1-ix)).

Ahora, recuerda que 1 / (1 + x²) es la derivada de la arcotangente de x. Y las fracciones de la derecha, ¿derivadas de qué funciones son? Resulta que son derivadas de logaritmos. La derivada del logaritmo natural de 1 + ix sería i / (1 + ix), y la derivada de logaritmo de (1 – ix) sería -i / (1 – ix). Por ende, 1 / (1 + ix) sería la derivada de ln(1 + ix) / i, y 1 / (1 – ix) sería la derivada de ln(1 – ix) / -i. Juntando todas estas funciones, resulta que la arcotangente de x es igual a 1 / 2i factor de ln(1 + ix) – ln(1 – ix). Más una constante. No olvides agregar una constante cualquiera, porque su derivada es 0. Puedes usar propiedades de logaritmos para juntar ambos en uno solo, y así quedarte con 1/2i por ln((1+ix)/(1–ix), + C. Finalmente, para ver cuál es esta constante C, una idea podría ser evaluar x en 0. Por un lado, arcotangente de 0 es 0, y por el lotro, logaritmo de 1 / 1 también es 0, así que nos queda 0 = C. Nuestra constante C es igual a 0, así que se elimina y nos queda esta identidad.

Primero que nada, es simplemente increíble que una función real como la arcotangente se pueda reescribir en función de un logaritmo complejo. Pero eso no es lo único interesante. Resulta que los logaritmos se usan para medir áreas bajo hipérbolas, por ejemplo el área bajo la curva y = 1/x. Pero también hipérbolas de la forma x²/a² – y²/b² = 1, como por ejemplo la hipérbola unitaria x² – y² = 1. Esta última ecuación es muy parecida a la ecuación de la circunferencia unitaria, x² + y² = 1, donde se originan todas las funciones trigonométricas, seno, coseno, tangente, etc. y obviamente las trigonométricas inversas también, como la arcotangente que estamos analizando justo ahora.

De hecho, en general las elipses de la forma x²/a² + y²/b² = 1, tienen una ecuación muy parecida a las de las hipérbolas en general, de la forma x²/a² – y²/b² = 1, con la única diferencia de un signo. Se podría pensar que debe haber alguna forma de convertir una elipse en una hipérbola, por ejemplo, modificando el eje vertical b y reemplazándolo por lambda b, donde lambda es un escalar cualquiera, y viendo qué valor de lambda podría provocar un cambio de signo. Pero resulta que para eso necesitamos que lambda² = -1. Es decir, lambda tiene que ser más o menos i. ¿Sabes qué significa todo esto? Que las elipses y las hipérbolas son lo mismo en el mundo complejo. Y tener identidades como que la arcotangente sea igual a cierto logaritmo complejo, siendo que la arcotangente pertenece a la circunferencia y el logaritmo a la hipérbola, nos confirma todo esto.

Pero bueno, toda esta relación entre elipses e hipérbolas va a quedar para otro video. Este video es sobre la fórmula de Euler. Muy bonito y todo, ¿pero qué tiene que ver esto con la fórmula de Euler? Pues para llegar a eso, podemos sustituir x = tan(theta). Así, por un lado nos queda arcotangente de tangente de theta. Ambas funciones, que son inversas entre sí, se cancelan y nos deja solo theta. Y al otro lado nos queda 1/2i por logaritmo de (1 + itan(theta)) / (1 – itan(theta)). Si multiplicamos el numerador y denominador de la fracción por 1 + itan(theta), el denominador queda como 1 + tan²(theta), que por identidades trigonométricas es igual a sec²(theta). Y arriba nos queda (1 + itan(theta))². Podemos convertir este cociente de cuadrados en el cuadrado de un cociente, así. El cociente se puede reescribir como 1/sec + itan/sec, que por identidades es igual a cos + isen. Y como está todo al cuadrado, por propiedades de logaritmos se puede reescribir como dos veces el logaritmo de cos + isen, quedándonos así 1/i por logaritmo de cos + isen. Finalmente multiplicamos ambos lados por i, y obtenemos algo parecido a lo que obtuvimos en la demostración número 2: logaritmo de cis de theta, es igual a i\*theta. Y bueno, ya sabes lo que sigue después de eso.